GRAPÍ VILUMARA, P.; MASSA ESTEVE, M.R. (ed.) (2011), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona, SCHCT-IEC, p. 97-104.

LA DEFINICIÓN DE ÁNGULO EN LAS MATEMÁTICAS ESPAÑOLAS DEL SIGLO XVII

Juan NAVARRO LOIDI
Investigador independiente

Palabras claves: *ángulos curvilíneos, geometría elemental, siglo XVII, España*

The definition of angle in Spanish mathematics during the 17th century

Summary: *In this paper, the different opinions about curvilinear angles held in Spain during the 17th century are discussed.*

Key words: *curvilinear angles, elementary geometry, 17th century, Spain*

Cómo se introducen hoy en día los ángulos

Ángulo es un concepto intuitivo, pero cuesta definirlo con precisión. Actualmente se introduce al comienzo de la enseñanza primaria, relacionándolo con la inclinación relativa de dos rectas o con el espacio comprendido entre dos semirrectas. Luego se observa que dos rectas que se cortan hacen cuatro ángulos, iguales dos a dos, y que definir un ángulo como el espacio comprendido entre dos semirrectas tampoco sirve, porque hay dos ángulos: uno cóncavo y otro convexo. Por otra parte, cualquier definición que parta de la idea de inclinación no incluye como ángulos el nulo y el llano. Al final de la enseñanza primaria o al comienzo de la secundaria se empiezan a introducir definiciones más precisas, como la siguiente:

> Dos rectas secantes determinan en el plano cuatro regiones angulares.
> Cada una de estas cuatro regiones angulares está limitada por dos semirrectas con el mismo origen.
> El conjunto de todas las semirrectas posibles con el mismo origen que las anteriores y comprendidas entre ambas se llama ángulo (Equipo Signo, 1990: 179).

También, se definen en esos cursos los grados, minutos y segundos, y se estudia la medida de los ángulos. Se acepta, sin mayor problema, que los ángulos se pueden sumar o restar y que, en general, se puede trabajar con sus medidas como con cualquier conjunto de números.

A finales de la E.S.O. se comienza a aceptar que los ángulos pueden ser negativos, relacionándolo con el sentido de un giro. También se introducen los radianes y se empieza a considerar ángulos mayores que 360º. No se enuncian nuevas definiciones de ángulo, pero se acepta implícitamente que existe un isomorfismo entre los ángulos y el grupo de las rotaciones en el plano, que es la definición que se suele dar en los libros más preocupados por el rigor (Dieudonnné, 1971: 125-138).

Esta forma de introducir los ángulos, que parece muy intuitiva y sencilla, es sin embargo, bastante reciente.

Cómo se definían los ángulos hasta el siglo XVIII

Hasta el siglo XVIII la definición de ángulo que se aceptaba era la que da Euclides en los *Elementos* (Lib. I def. 8, 9):

> 8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta (Euclides-Puertas, 1991: 193).

Lo que podría ser equivalente a las descripciones que se dan en primaria para introducir los ángulos. Pero, esa definición se completa con la siguiente:

> 9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo (Euclides-Puertas, 1991: 193).

De esas definiciones se deduce que los ángulos pueden ser rectilíneos, limitados por líneas rectas, "curvilíneos", limitados por curvas, o "mixtilíneos", con un lado curvo y otro recto. Los ángulos curvilíneos y mixtilíneos podrían ser una generalización interesante de nuestra idea de ángulo, pero su medida plantea serios problemas. Pese a ello, aceptar esas definiciones de ángulos curvilíneos no hubiera planteado ninguna dificultad en la enseñanza elemental, si no se volvieran a utilizar en los *Elementos*. Serían como los rombos o los romboides, que Euclides define entre los cuadriláteros (libro I, def. 22), y después nunca usa. Pero los ángulos mixtilíneos se utilizan en el libro III para enunciar varias propiedades importantes de las tangentes. En la proposición III.16 de los *Elementos* se dice:

> La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo (Euclides-Puertas, 1991: 311).

En esa proposición Euclides se sirve de dos tipos de ángulos mixtilíneos: el "ángulo de un semicírculo", que es un ángulo cuyos lados son el diámetro y la circunferencia, y el "ángulo restante", que es el ángulo mixto comprendido entre la tangente y el arco, también llamado "ángulo de contingencia" o "ángulo en cuerno".

Si no se aceptan estos ángulos mixtilíneos, el enunciado y la demostración de esta propiedad deberían cambiarse. Pero, si se aceptan, nos encontraríamos con que los ángulos no serían "magnitudes" porque no se podrían comparar entre sí los ángulos curvilíneos, mixtilíneos y rectilíneos. La medida de esos ángulos generalizados no cumpliría la propiedad arquimediana de los números reales. Es decir, no sucedería que dadas dos medidas cualesquiera, $a>0$ y b, siempre existe un n natural tal que $n \cdot a>b$. Esta propiedad, con un enunciado algo diferente, está establecida en la proposición primera del libro X de los *Elementos* que dice:

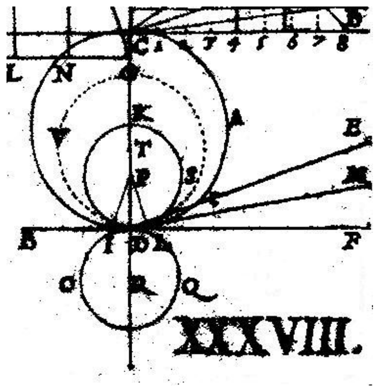

Fig. 1. (Caramuel, 1678).

> 1. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de lo que queda una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la menor dada (Euclides-Puertas, 1996: 12).

Pero, si se toma cualquier ángulo agudo rectilíneo y un ángulo en cuerno, por mucho que al ángulo rectilíneo se le quite más de la mitad, el resto nunca llegará a ser menor que el ángulo de contingencia. En efecto, colocado el ángulo rectilíneo sobre el mismo vértice y con un lado tangente al lado curvo del ángulo en cuerno, los restos del ángulo rectilíneo nunca pueden ser menores al de contingencia, debido a la proposición III.16 de los *Elementos,* que antes se ha mencionado. Luego habría que aceptar que los ángulos no son magnitudes (Figura 1).

Discusión sobre los ángulos curvilíneos

En la Antigüedad se discutió sobre la validez de esa definición de ángulo, sin llegar a una conclusión definitiva. En el Renacimiento volvieron a repetirse las discusiones. Existían dos posturas. En un grupo estaban los que decían que los "ángulos en cuerno" no eran ángulos porque no había "inclinación mutua", ya que las tangentes no cortan la curvan sino que solamente la tocan. Esa postura la defendió el francés Jacques Peletier de Le Mans (1517-1582). Más tarde, también la sostuvieron François Viète (1540-1603) y Galileo Galilei (1564-1642). Esa opinión les llevaba a defender que todos los ángulos de un semicírculo coinciden, y que sus complementarios, los ángulos en cuerno, también son todos iguales. Enfrente estaban los que defendían que los ángulos de contingencia sí son magnitudes, porque se pueden dividir, aumentar o disminuir, aunque no lo sean de la misma manera que los ángulos rectilíneos. Añadían que la postura contraria debía ser falsa porque llevaba a que todos los ángulos de la semicircunferencia son iguales y eso no puede ser, pues al superponerlos no siempre coinciden. Los de más radio son mayores que los de radio más pequeño. El más firme defensor de esta postura fue el jesuita Clavius (Figura 2).

La polémica acabó a finales del siglo XVII cuando John Wallis (1616-1703) en su ensayo *De angulo contactus et semicirculi tractatus* (1656) y posteriormente en su libro *Algebra* (1685) explicó que lo que variaba en los ángulos de contingencia o del semicírculo en las comparaciones de Clavius no era la magnitud de un supuesto ángulo sino la curvatura de las curvas que lo limitaban. (Euclides-Heath, 1926, v. I : 176-181; v. II : 37-43).

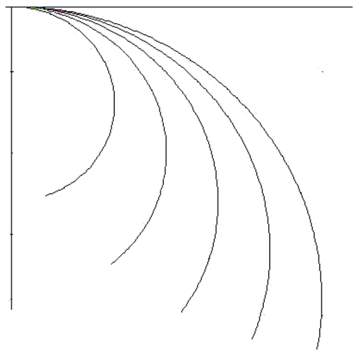

Fig. 2.

Repercusión en España en la segunda mitad del siglo XVII

Esa polémica no tuvo mucha repercusión en la Península Ibérica en esa época. Ningún matemático investigó sobre esa cuestión. Pero estaba latente en todos los libros de geometría y estudiando la forma de abordar la definición de ángulo en esos manuales se pueden descubrir diferentes maneras de soslayar las cuestiones dudosas en matemáticas.

En los libros para la preparación profesional de arquitectos, agrimensores, marinos o militares, que frecuentemente solían incluir unos rudimentos de matemáticas, no se definía el ángulo, o se daba la definición de Euclides; pero, en la práctica, sólo se utilizaban los ángulos rectilíneos. En problemas como medir el desnivel de una superficie para hacer una conducción de agua, hallar el ángulo que hacen dos paredes en un edificio, o dar la elevación adecuada a un cañón, no se necesita tener una idea de ángulo muy precisa. Para los autores de esos manuales prácticos el problema principal solía ser la forma de medir los ángulos. Por ejemplo Fernández de Medrano (1646-1705) en *El Perfecto Artificial, Bombardero y Artillero* (1699) en el "Capitulo VII Modo de apuntar el mortero" dice sobre la elevación que:

> Se tomará una escuadra [...] que no es otra cosa que la cuarta parte de un circulo (entre dos reglas una mayor que otra) dividida en noventa partes iguales (a las cuales los Matemáticos llaman en su ciencia grados) esta escuadra tiene un agujerillo en el centro del circulo, de donde pende una plomada que ha de marcar el grado o parte por la cual se quiere tirar (Fernández de Medrano, 1699: 89).

Cuando se quería hacer una exposición más docta se incluía la definición de Euclides, informando de la existencia de los ángulos curvilíneos, aunque luego tampoco se utilizaran. Por ejemplo Dávila y Heredia (1627-1686) en el manual de agrimensura *Arte de Medir Tierras* (1674) dice:

> Angulo llano es la inclinación de dos líneas que se tocan en un plano y no están en derecho. Angulo rectilíneo se llama cuando las líneas que contienen el ángulo fueren rectas (Dávila, 1674: 44).

Incluso, en libros de esgrima, como *Compendio de los fundamentos de la verdadera destreza y filosofía de las armas* (1675) de Francisco Ettenhard (1645-1705) se incluía la definición de ángulo y se advertía que se clasificaban en rectilíneos, curvilíneos y mixtos. Pero en estos libros esa definición no tenía consecuencias y en ellos no se utilizaban los ángulos curvilíneos. Con esa y otras definiciones similares lo que se pretendía era dar a las afirmaciones posteriores el prestigio de estar basadas en un conocimiento riguroso. Como dice Ettenhard (1675: s. p.) en la introducción:

> Procuraré dar noticia; y definir, en primer lugar, los principios geométricos que son necesarios, para que con el conocimiento de ellos, podamos demostrar lo que convenga para la aprobación, y seguridad de los siguientes Discursos.

En los libros de geometría pura, o "especulativa" como se llamaba en aquella época, o en los apartados teóricos dedicados a la geometría de los tratados profesionales más completos, era obligado dar una definición de ángulo y, prácticamente en todos se daba la de Euclides. De hecho, la mayoría de los libros de geometría para la enseñanza que se editaron en España por esas fechas eran versiones más o menos adaptadas de los *Elementos*. Por ejemplo, Fernández de Medrano, que en sus libros de artillería no se preocupaba por definir los ángulos como se ha comentado antes, en su versión de los *Elementos* da la definición de Euclides (Euclides-Medrano, 1728: 8), introduciendo los ángulos rectilíneos, mixtilíneos y curvilíneos. Lo mismo, aproximadamente, hacen en sus versiones de los *Elementos* otros autores que los publicaron en castellano durante el siglo XVII, como L. Carduchi (?-1674), J. Kresa (1645-1715) o F. Larrando de Mauleón (1664-1736). Luego en el libro III incorporan la definición de ángulo del semicírculo y del ángulo de contingencia, y enuncian y demuestran la proposición III. 16 como lo hacía Euclides.

En estos libros más teóricos no se plantean, en general, las dificultades que surgen de la aceptación de los ángulos curvilíneos. Sólo se discute sobre ello en los tratados publicados por Tomás Vicente Tosca (1651 - 1723) y Juan Caramuel (1606 - 1682).

T.V. Tosca y J. Caramuel

Tosca en el volumen I de su *Compendio Mathematico* (1707) en el "Tratado de la Geometría Elementar" tiene un "Escolio" en la proposición III.16 (Tosca, 1757: 58-59) en el que se argumenta sobre esta cuestión. Explica que, de esa proposición, algunos deducen que el ángulo de contingencia es menor que cualquier ángulo agudo y que el del semicírculo es mayor. Continúa afirmando que, si eso fuera así, se podrían tomar ángulos de amplitud cada vez menor sin encontrar ninguno igual al ángulo de contingencia lo que no es aceptable. Añade que, como dice Tacquet,[1] "todos estos corolarios no son más que unas paradojas nacidas de la mala inteligencia de la naturaleza del ángulo, que se supone ser cantidad, lo que es falso". Tosca cree que "más pertenece el ángulo al predicamento que los Filósofos llaman situación, que a otro alguno". Advierte que si se habla en los *Elementos* de que esos ángulos son mayores o menores no es "con todo rigor y propiedad" porque para compararlos se consideran "en cuanto sus medidas, que son los arcos de circulo" y para el ángulo de contingencia y el del semicírculo la medida del arco depende del radio con que se tome.

Tosca era consciente de las dificultades que aparecen si se aceptan los ángulos curvilíneos y pretendía evitarlas acudiendo a la filosofía. Para ello se refiere a las Categorías (predicamentos) de Aristóteles y los escolásticos. En la Antigüedad ya había habido una división entre los que decían que el ángulo es una cantidad, como Plutarco, los que pensaban que es una cualidad como Eudemo y unos terceros que opinaban que es una situación, como Simplicio. El inconveniente de este razonamiento es que los ángulos se estudian en cuanto son una cantidad, por lo que considerarlos una situación o no considerarlos ángulo no parece que sea muy diferente. Pero, probablemente, los discípulos de Tosca se quedarían satisfechos con una explicación que recurre a conocimientos superiores. De todas formas, en este caso siempre hubiera convenido expresar de otra forma la proposición III.16 para tenerla "con todo rigor y propiedad".

---

[1] Se refiere al libro del jesuita flamenco Andrea Tacquet *Elementa Geometriae Planae Ac Solidae. Nec Non Selecta Ex Archimede Theoremata*, publicada por primera vez en 1654

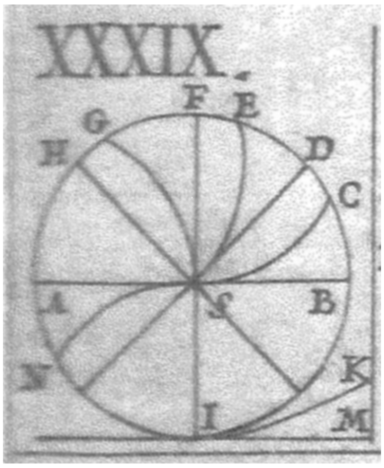

Fig. 3. (Caramuel, 1678).

El otro autor que profundizó en la cuestión es Juan Caramuel, y lo hizo con un criterio completamente diferente. En su *Arquitectura civil* define:

> El concurso de dos líneas que se vienen a encontrar oblicuamente es lo que llamamos Angulo (Caramuel, 1678, v. 1, Geometría: 30).

Explica que las líneas pueden ser curvas, o rectas. Más adelante dice que "La grandeza de un Angulo mide el Arco que sobre él se escribe" (Caramuel, 1678, v. 1, Geometría: 31). A continuación Caramuel estudia los ángulos de contingencia y de la semicircunferencia:

> Proposición XXVII El ángulo SDA que hace la circunferencia con el diámetro es algo menor que el recto; pero es imposible señalar algún ángulo rectilíneo agudo que le sea igual. Corolario I Luego es mayor que todo ángulo agudo. Corolario II Luego el ángulo SDE que por ser la circunferencia y la tangente se llama ángulo contingentix es menor que todo ángulo agudo (Caramuel, 1678, v. 1, Geometría: 32).

Es decir, Caramuel no tiene problemas en dar por buenas las afirmaciones paradójicas que critica Tosca. Además infiere nuevas consecuencias inesperadas, como que "Este ángulo de contingencia puede crecer in infintum [...] porque el círculo tangente puede ser menor y menor in infinitum" (p. 32) y que "el mismo ángulo puede disminuirse in infinitum [porque..] se pueden hacer círculos mayores y mayores in infinitum" (Caramuel, 1678, v. 1, Geometría: 32).

Estas proposiciones pueden parecer absurdas, y desde luego no son muy rigurosas; pero se han vuelto a reconsiderar en la actualidad al discutir sobre las representaciones de los infinitésimos en el "análisis no-estandar" (Cuesta Dutari, 1981: 39-41).

Del ángulo formado por dos circunferencias, Caramuel dice que no se puede medir; pero, que, si los ángulos están limitados por arcos de igual radio e igualmente orientados, sí es posible; y pone dos ejemplos de 45º y 90º (Figura 3).

Caramuel intuía la importancia de las curvaturas de los lados en los ángulos curvilíneos; pero si Tosca con su rigor deja al lector sin solución, otro tanto pasa con las ideas originales pero expuestas sin precisión de Caramuel.

Evitar el problema

Aunque no se ha encontrado ningún libro en que se defienda que los ángulos curvilíneos no son ángulos, es posible que el jesuita José Zaragoza (1627-1679) fuera de esa opinión; pero no quisiera entrar en polémicas. En su versión adaptada de los *Elementos* de Euclides, define el ángulo como:

> Angulo plano, es la inclinación de dos líneas, que se juntan en un punto: como ABC. (Euclides-Zaragoza, 1678: 5).

Prosigue tratando de la forma de designar un ángulo, sin añadir, como Euclides y los otros editores de los *Elementos* de la época, que los ángulos pueden ser rectilíneos, curvilíneos o mixtilíneos. Más adelante, en el libro III, en lugar de dar la proposición 16 con un enunciado similar al de Euclides usando los ángulos del semicírculo o de contingencia, da el siguiente teorema:

> De la recta tangente del Círculo. 1 La perpendicular al extremo del diámetro toca el círculo en solo aquel punto. 2 Cualquiera otra recta por el contacto corta al/ Circulo; y la tangente, es perpendicular al radio, y única en un punto" (Euclides-Zaragoza, 1678: 68 - 69).

Ni menciona ni utiliza los ángulos curvilíneos. Como no discute la cuestión no hay forma de saber si lo hizo porque le parecía un asunto difícil, que no debía de tratarse en un libro de introducción a la geometría, o porque creía que no debían aceptarse. Es fácil que opinara que no se deben utilizar y no lo mencionara por no oponerse públicamente a sus correligionarios Tacquet y Clavio. En todo caso su solución parece la más correcta pedagógicamente. No acepta sin crítica el desarrollo de Euclides, tampoco lo critica sin ofrecer una solución. Sencillamente lo evita buscando otra forma de dar las propiedades de las tangentes a un círculo sin utilizar ángulos curvilíneos.

Bibliografía

CARAMUEL, J. (1678), *Architectura Civil Recta, y Obliqva*, Vegeven, Camilo Corrado. 3 v.

CUESTA DUTARI, N. (1981), «Tres notabilísimos pasajes de Euclides», *Llull*. 4, (6-7), 35-42.

DAVILA y HEREDIA, A. (1674), *Arte de Medir Tierras*, Valencia: s. i.

DIEUDONNNÉ, J. (1971), *Álgebra lineal y geometría elemental*, Madrid, Selecciones Científicas.

EQUIPO SIGNO (1990), *Azimut Matemáticas 6º E.G.B.*, Madrid, Anaya.

ETTENHARD, F.A. (1675), *Compendio de los Fundamentos de la verdadera Destreza y Filosofía de las Armas*, Madrid, Antonio de Zafra.

EUCLIDES / PUERTAS Mª. L. (1991), *Elementos Libros I-IV*, Madrid, Gredos.

EUCLIDES / PUERTAS Mª. L. (1996), *Elementos Libros X-XIII*, Madrid, Gredos.

EUCLIDES / FERNANDEZ DE MEDRANO, S. (1728), *Los Seis Primeros Libros, Onze, y Doze, de los Elementos Geometricos del Famoso Philosopho Euclides Megarense*, Amberes, Viuda de Henrico Verdussen. 1ª edición 1688.

EUCLIDES/ HEATH, T. L. (1926), *Euclid The thirteen books of the Elements*, Cambridge, Cambridge University Press. 3 v. Reeditado por Dover en 1956.

EUCLIDES / ZARAGOZA, J. (1678), *Euclides Nuevo-Antiguo*, Madrid, Antonio Francisco de Zafra.

FERNÁNDEZ DE MEDRANO, S. (1699), *El Perfecto Artificial, Bombardero y Artillero*, Bruselas, Lamberto Marchant.

TOSCA, T. V. (1757), *Compendio Mathematico*, Valencia: Joseph Garcia. 9 v. 1ª edición 1707-1715